複素射影空間上の有理微分形式のなす複体について (代数幾何とその近傍)

寺尾, 宏明

数理解析研究所講究録
273巻 1976年 151-163

複素射影空間上の有理微分形式のなす複体について

東大 理 寺尾宏明

§1.

Xをn次元複素非特異多様体、DをXの reduced divisor とする。そのとき、

記号(1.1): 非負整数k, qに対して、Xの各点xで、

$$\Omega^q(kD)_x = \{\omega \in \text{germs of rational } q\text{-forms at } x;\ Q^k\omega \text{ が正則}\},$$

$$\Omega^q(\log kD)_x = \{\omega \in \text{germs of rational } q\text{-forms at } x;\ Q^k\omega \text{ と } Q^k d\omega \text{ がともに正則}\}$$

が定義される。ただし、ここで、Qは点xの近傍でのDの定義方程式のひとつであり、上記の定義は、Qの選択に依らない。そして、k, qのどちらか少なくとも一方が負の整数のときは、$\Omega^q(kD)_x = \Omega^q(\log kD)_x = 0$と、定義する。

そして、X上の解析的連接層

$$\Omega^q(kD) = \bigcup_{x \in X} \Omega^q(kD)_x$$

$$\Omega^q(\log kD) = \bigcup_{x \in X} \Omega^q(\log kD)_x$$

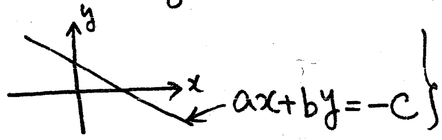
が、定義されて、各々、Dに沿って高々k位の極をもつq-形式の芽のなす層とかDに沿って高々対数的k位の極をもつq-形式の芽のなす層とかをいう。

注意(1.2)：この定義は、Dが正規交叉のときは、k=1のときのP. Deligneの定義と一致するが、Dが一般の因子のときは、斎藤恭司によって（k=1）導入された。そして、$\Omega^1(\log D)_x$を考えると、これは、$\mathcal{O}_x$-加群だが、Dがxで正規交叉でない場合は、自由$\mathcal{O}_x$-加群になるかどうかはわからない。そして、斎藤は、$\Omega^1(\log D)_x$が$\mathcal{O}_x$-自由になることと、xのある近傍Uがあって、$U\cap(U\setminus D)$が$K(\pi,1)$になることとは、同値ではないかと予想した。この予想は、間違っていたともきくが、詳しいことは知らない。しかし、これはなかなか面白い予想だと思う。これに、関連して、次のことが成立する。

命題(1.3)：$(D,0)$を$(\mathbb{C}^3,0)$に於ける、reduced divisorの芽とする。そのとき、

$\Omega^1(\log D)_0$が自由$\mathcal{O}_0$-加群 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ Dの特異点のなすスキームは、1次元Cohen-Macaulayスキーム

例えば、$\mathbb{C}^2 \setminus \{\text{lines}\}$ の $K(\pi,1)$ について考えたいときには、$\mathbb{P}^2 \setminus \{\text{無限の位置の line}\} \setminus \{\text{lines}\}$ としておいて、結局、$(\mathbb{C}^3,0)$ 内の lines の germs の場合に持ちこめる。

例(1.4): $\mathbb{C}^2 \setminus \Big\{$ 

$\Big\}$ というようなときは、

(a, b, c のうち、ふたつはゼロでない)

$Q = xyz(ax+by+cz)$ としておいて、$D=\{Q=0\}$ の特異点のなすスキームに対応するイデヤル I は、

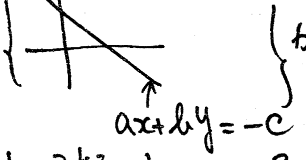
$$I = \{yz(2ax+by+cz),\ zx(ax+2by+cz),\ xy(ax+by+2cz)\}$$

であり、height $I = 2$ であって、$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}/I$ が Cohen-Macaulay になることと、I の素因子の高さがすべて 2 に等しいことは、同値だが、それは、$I:(x,y,z) = I$ と同値。

簡単な計算から、

$I:(x,y,z) = I \iff a, b, c$ のうち、どちかひとつが 0.

がわかる。これは、

$\mathbb{C}^2 \setminus \Big\{$ 

$\Big\}$ が $K(\pi,1) \iff a, b, c$ のうち、どれかひとつが 0.

なる事実と対応していると思えるかもしれない。

また、

命題(1.5): $(D_1,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n,0)$, $(D_2,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^m,0)$ を、divisors の germs とするとき、(ともに、quasi-homogeneous とする)

$(D = D_1 \times \mathbb{C}^m \cup \mathbb{C}^n \times D_2,\ 0\times 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0)$ も divisor の germ になるが、$\Omega^1(\log D)_{0\times 0}$、$\Omega^1(\log D_1)_0$、$\Omega^1(\log D_2)_0$ のうちのふたつが free なら、他のひとつも free である。

この結果は、$K(\pi, 1)$ の filtration type の判定法に対応していると思えるだろう。

いずれにせよ、少なくとも、$\mathbb{C}^2 - \{\text{lines}\}$ の場合に、$\Omega^1(\log D)$ が free になるのは、どのような configuration で起こりうるのかという問題は(スキーム的な意味は、(1.3) で云われているが…)、topology との関係がつくにせよつかないにせよ、多少は面白いかと思う。

記号(1.6): $A^q_k := \Gamma(X, \Omega^q(kD))$,

$B^q_k := \Gamma(X, \Omega^q(\log kD))$,

$A^q = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^q_k$.

すると、Grothendieck の algebraic de Rham theorem があって、

定理(1.7): $H^p(A^\cdot) \cong H^p(X-D; \mathbb{C})$.

但、$A^\cdot$ とは、$\{\cdots \to A^{q-1} \xrightarrow{d} A^q \xrightarrow{d} A^{q+1} \to \cdots\}$ なる複体を表わす。

§2.

今、$A^{\cdot}$に、次のようにfiltrationをいれる。

<u>定義(2.1)</u>：

$$A^{\cdot}_{q-k} := \{ \cdots \xrightarrow{d} A^q_k \xrightarrow{d} A^{q+1}_{k+1} \xrightarrow{d} \cdots \}$$

すると、$A^{\cdot} \supset \cdots \supset A^{\cdot}_i \supset A^{\cdot}_{i+1} \supset \cdots \supset A^{\cdot}_{n+1} = 0$。そして、これに付随したスペクトル列を考えて、以下、$\{E_r^{p,q}, E_\infty^n\}$で表わす。すると、P. Griffiths と P. Deligne による、次の結果がある。

<u>定理(2.2)</u>：　Dが非特異で、十分豊富（$H^p(X, \Omega^q(kD)) = 0$が、すべての正整数p, kについて成立）なら、

$$E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

が、すべてのp, qについて成立する。

実は、より強く、$E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q} = 0$　$(p+q < n = \dim X)$。

<u>注意(2.3)</u>：この定理は、Hodge filtration との関係で、興味がある。詳しくは、Griffiths "On the periods of certain rational integrals I" (Annals of Math., 90 (1969), 460–495) にある。

(2.2)をDが、一般の特異点を許す因子で、$X=\mathbb{P}^n\mathbb{C}$の場合に、拡張することを考える。実は、次の定理が成立する。

定理(2.4): $X=\mathbb{P}^n\mathbb{C}$のとき、

$E_1^{p,q}=E_\infty^{p,q}=0$ が、$1<p+q<s-1$をみたすすべてのp,qに対して、成立する。但、ここで、$s=\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^n}(\Sigma D)$で、$\Sigma D$は、$D$の特異点の集合を表わす。

この証明のための、道具を少し、準備する。

定義(2.5): 非負整数i,kに対して、

$H_k^i:=\{\mathbb{C}^{n+1}$上の同次有理$i$-形式で、$\hat{D}$に沿って、高々$k$位の極を有するもの$\}$

を定義する。但、$\hat{D}$とは、$\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{P}^n$なる射影によって、$D\subset\mathbb{P}^n$を$\mathbb{C}^{n+1}$内の錐として、引き上げたものをいい、'同次'とは、$\mathbb{C}^{n+1}$への$\mathbb{C}^*$-作用($(\xi_0,\cdots,\xi_n)\mapsto(c\xi_0,\cdots,c\xi_n)$, $c\in\mathbb{C}^*$)で、不変なものをいう。

また、i,kのいずれか少なくとも、一方が、負なら、$H_k^i=0$と定義する。

すると、次のふたつの複体が得られる。

$$L^{\cdot}_{i-k} := \{\cdots \xrightarrow{d_L} H^i_k \xrightarrow{d_L} H^{i+1}_{k+1} \xrightarrow{d_L} \cdots\}$$

$$'L^{\cdot}_{i-k} := \{\cdots \xrightarrow{d'_L} H^i_k \xrightarrow{d'_L} H^{i+1}_{k+1} \xrightarrow{d'_L} \cdots\},$$

但、d_L は外微分作用素、d'_L は、

$d'_L\omega = \dfrac{1}{\deg Q}\dfrac{dQ}{Q}\wedge\omega$, $\omega \in H^i_k$ (Q は、$\hat{D}$ の定義方程式)。

そして、

$$L^{\cdot} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} L^{\cdot}_i \supset \cdots \supset L^{\cdot}_i \supset L^{\cdot}_{i+1} \supset \cdots \supset L^{\cdot}_{n+2} = 0,$$

$$'L^{\cdot} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} {'L^{\cdot}_i} \supset \cdots \supset {'L^{\cdot}_i} \supset {'L^{\cdot}_{i+1}} \supset \cdots \supset {'L^{\cdot}_{n+2}} = 0$$

なるふたつのフィルターづけられた複体が得られる。

さて、$A^{\cdot}$ と $L^{\cdot}$, $'L^{\cdot}$ との間の射をつくるのに、次の図式を考える。

$$\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \supset \mathcal{E} \cong \mathbb{P}^n \\ f\downarrow \\ \mathbb{C}^{n+1} \supset \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \end{array}$$

但、f は $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点中心の blowing up、π は標準射影、$\mathcal{E}$ は f から決まる例外因子である。

$p: H^i_k \longrightarrow A^{i-1}_k$ なる準同型を、

$$p(\omega) = \mathrm{res}\circ f^*\omega \quad (\omega \in H^i_k)$$

で、定義する。ここで、res とは、$(\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}, \mathcal{E})$ について

の留数をとることとする。

$$\begin{tikzcd}
H^i_k \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "d_L"'] \arrow[d, shift left, "d'_L"] & A^{i-1}_k \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "d"] & H^{i-1}_k \arrow[d, shift right, "d_L"'] \arrow[d, shift left, "d'_L"] \\
H^{i+1}_{k+1} \arrow[r, "p"'] & A^i_{k+1} \arrow[r, "\pi^*"'] & H^i_{k+1}
\end{tikzcd}$$

なる図式に於て、次の補題が成立つ。

補題(2.6):

(i) $d\circ d=0$, $d_L\cdot d_L=d'_L\cdot d'_L=0$,

(ii) $d_L\cdot\pi^*=\pi^*\cdot d$,

(iii) $d_L\cdot d'_L+d'_L\cdot d_L=0$,

(iv) $d\circ p=p\circ d_L$

(v) $p\circ\pi^*\circ p=0$

(vi) $d'_L\circ\pi^*\circ p+\pi^*\circ p\cdot d'_L : H^i_k\longrightarrow H^i_{k+1}$ は、包含写像に他ならない。

(vii) p は全射である $(i>1)$

また、次の補題は、斎藤恭司による。

補題(2.7):(一般化された de Rham の補題)

$H^q({}'L_i)=0$ が $q<s-1$ に対して成立する。

補題 (2.8):

$H^p(Gr^q L^\cdot) \xrightarrow[\sim]{\alpha} H^p(Gr^q{}'L^\cdot)$ がすべての p, q について同型になる。但、α は $H^i_k \longrightarrow H^i_k$ なる恒等写像から induce された写像とする。

これらを使って、(2.4) を証明する。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} H^{q+1}(Gr^{p+1}{}'L^\cdot) & \xleftarrow{\delta} & H^q(Gr^p{}'L^\cdot) \\ \alpha^{-1}\downarrow\wr & & \uparrow\wr\,\alpha \\ H^{q+1}(Gr^{p+1}L^\cdot) & & H^q(Gr^p L^\cdot) \\ & p^* \searrow \quad \nearrow \bar{\pi}^* & \\ & H^q(Gr^p A^\cdot) & \end{array}$$

$(q > 1)$

ここで、$\bar{\pi}^*$ は $\pi^*: A^q_k \longrightarrow H^q_k$ から induce されたもの、p^* は p: ~~A~~ $H^{q+1}_k \longrightarrow A^q_k$ から induce されたものとする。

また、δ は、

$$0 \to Gr^{p+1}{}'L^\cdot \longrightarrow {}'L^\cdot_p / {}'L^\cdot_{p+2} \longrightarrow Gr^p{}'L^\cdot \to 0$$

の Bockstein 写像とする。

$\psi \in A^q_{k+2}$ に対して、$p \circ d'_L \circ \pi^* \psi$ なる元を考えると、(2.6) の (vii) から、$\psi = p(\zeta)$ なる $\zeta \in H^{q+1}_{k+2}$ があるから、

$$\begin{aligned} & p \circ d'_L \circ \pi^* \psi \\ &= p \circ d'_L \circ \pi^* \circ p(\zeta) \\ &= p(\zeta - \pi^* \circ p \circ d'_L \zeta) \qquad ((4.3) \text{ の (vi)}) \end{aligned}$$

$$= p\zeta \qquad ((4.3) の (v))$$
$$= \psi$$

これは、前頁の図式に於て、$p^* \circ \alpha^{-1} \circ \delta \circ \alpha \circ \pi^*$ が恒等写像であることを示す。一方、一般に、δ は、

$$\begin{tikzcd} H^q(Gr^p_{'}L^{\cdot}) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr] & & H^{q+1}(Gr^{p+1}_{'}L^{\cdot}) \\ & H^{q+1}({'}L^{\cdot}_{p+1}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

と分解するから、(2.7) と組み合わせて、(2.4) が示される。

(2.4) の系として、次のことがわかる。

<u>系 (2.9)</u>: $H^r(\mathbb{P}^n - D\,;\,\mathbb{C}) = 0$ が $1 < r < s-1$ に対して、成立する.

<u>注 (2.10)</u>: このことは、topological には、加藤十吉の 'partial Poincaré duality' に対応している。

<u>系 (2.11)</u>: $B^i_1 = \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^i(\log D)) = 0$ が $1 < i < s-1$ に対して、成立する.

§3.

$\{E_r^{p,q}, E_\infty^n\}$ の E_2-terms の意味とその必要性を explicit

に考える。

<u>定理(3.1)</u>: 次の列は完全である。

$\cdots \to E_2^{q-k-1,k} \to H^q(B_{k-1}^{\cdot}) \to H^q(B_k^{\cdot}) \to E_2^{q-k,k} \to H^{q+1}(B_{k-1}^{\cdot})$
$\to H^{q+1}(B_k^{\cdot}) \to \cdots$, 但、$B_k^{\cdot}$ とは $\{\cdots B_k^{q-1} \xrightarrow{d} B_k^{q} \xrightarrow{d} B_k^{q+1} \cdots\}$
なる複体のことをいう。

この定理は、$E_2^{p,q}$ が、対数的極をもつ微分形式からなる複体のコホモロジーと深い関係にあることを示している。

もし、$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ がすべての p,q について成立するような (X,D) に関しては(この例は、次の§で示す)

$$H^q(B_k^{\cdot}) = \bigoplus_{i=0}^{k} E_2^{q-i,i} = \bigoplus_{i=0}^{k} E_\infty^{q-i,i} \hookrightarrow H^q(X-D;\mathbb{C})$$

が成立することがわかる。いいかえれば、$H^q(X-D;\mathbb{C})$ の元が、$B_k^{\cdot}$ のコホモロジー類で表わされている。

1次元のコホモロジーについては

<u>定理(3.2)</u>: $X=\mathbb{P}^n$ のとき、

$E_2^{0,1} = E_\infty^{1}$、いいかえれば、

$H^1(B_1^{\cdot}) \cong H^1(\mathbb{P}^n - D;\mathbb{C})$ が成立する。

<u>注(3.3)</u>: 一般に、$E_1^{0,1} \neq E_2^{0,1}$、即ち、閉形式でない B_1^1

の元が存在することがある．例えば，$Q=x^3+y^2z$ を $\mathbb{P}^2$ 内の因子の定義式とすると，

$$\omega=\frac{3yz\,dx-2zx\,dy-xy\,dz}{x^3+y^2z}$$

は，B^1_1 の元だが，閉形式でない。こういうことは，Dが正規交叉のときには，起こりえない（Deligne："Théorie de Hodge II"）

§4.

ある種のDに対しては，$E_2^{p.q}=E_\infty^{p.q}$ が，計算で示せる。

定義(4.1)：Qが同次多項式のとき，Qが分離型とは，Qが共通変数をもたない単項式たちの和で書けるときを云う．

x^3+y^2z，$x^m+y^m+z^m$，xyz などが，その例である。

そのとき，そのようなQで定義された $\mathbb{P}^n$ 内の因子をDとすると，

定理(4.2)：$E_2^{p.q}=E_\infty^{p.q}$ が，$p+q=n$ のとき，成立する．

よって，(2.4)と組み合わせると，

系(4.3)：Dが(4.2)の如きもので，しかも，孤立特異

点を有するとすれば、

$$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}.$$

が、すべての p、q について成立する。